УДК 519.218.28 **DOI** 10.17150/2500-2759.2021.31(4).502-507

ВЕРОЯТНОСТНО-КОМБИНАТОРНАЯ МОДЕЛЬ ЭПИДЕМИИ ДЛЯ ВУЗА

А.В. Боровский, Т.И. Ведерникова
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье

Дата поступления
15 июля 2021 г.

Дата принятия к печати
27 декабря 2021 г.

Дата онлайн-размещения
28 декабря 2021 г.

Ключевые слова

Теория эпидемий; эпидемическая кинетика; вероятности и скорости инфицирования; заражение преподавателей и студентов в учебных заведениях; распространение вирусной инфекции; вероятностно-комбинаторные задачи теории эпидемий

Аннотация

Цель исследования состояла в том, чтобы выявить основные причины инфицирования преподавателей и студентов в университете. Авторами рассмотрены аналитически две вероятностно-комбинаторные задачи по определению вероятностей и скоростей инфицирования преподавателей и студентов в вузе в результате появления среди контингента студентов инфицированных лиц. Для решения задач применен математический аппарат теории вероятностей и комбинаторики. Для факториалов возникающих в структуре сочетаний используется асимптотическая формула Стирлинга. В конечных формулах возникают сходящиеся ряды, отражающие множественность сценариев вероятностного подхода. Получены аналитические формулы для сумм рядов, вероятностей и скоростей инфицирования преподавателей и студентов. Показано, что инфицирование преподавателей и студентов происходит в результате опасных пространственно-близких контактов, когда преподаватель и студент находятся на расстоянии менее 0,5 м друг от друга. В студенческой среде при очном обучении такие контакты исключить невозможно. В среде преподавателей возможен также менее вероятный аудиторный механизм инфицирования через объем воздуха, зараженный вирусами.

PROBABILISTIC COMBINATORIAL MODEL OF THE EPIDEMIC FOR A UNIVERSITY

Andrei V. Borovsky, Tatyana I. Vedernikova
Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation

Article info

Received
July 15, 2021

Accepted
December 27, 2021

Available online
December 28, 2021

Keywords

Theory of epidemics; epidemic kinetics; probabilities and rates of infection; infection of teachers and students in educational institutions; spread of viral infection in universities; probabilistic combinatorial problems of the theory of epidemics

Abstract

The aim of the research was to identify the main causes of infection of teachers and students in a university. Two probabilistic combinatorial problems are considered analytically to determine the probabilities and rates of infection of teachers and students in a university as a result of the appearance of infected persons among the contingent of students. The mathematical apparatus of probability theory and combinatorics is used to solve the problems. For the factorials of combinations arising in the structure, the asymptotic Stirling's formula is used. Convergent series arise in the final formulas, reflecting the multiplicity of scenarios of the probabilistic approach. Analytical formulas for the sums of series, probabilities and rates of infection of teachers and students are obtained. It is shown that the infection of teachers and students occurs through «dangerous» spatially close contacts, when a teacher and a student talk at a distance of less than 0.5 meter. It is impossible to exclude such contacts in the students' environment during full-time study. Among teachers, there is also a less probable classroom mechanism of infection through the volume of air infected with viruses.

Введение

Борьба с пандемией Covid-19 продолжается уже больше года на разных иерархических уровнях — государство, область, город, крупное предприятие или учреждение [1; 2]. Чтобы добиться успеха, для каждого уровня иерархии нужно иметь теоретические модели [1–7], описывающие развитие эпидемии. Это позволит руководителям принимать адекватные решения и с минимальными потерями выходить из неблагоприятной ситуации. В работе рассматривается вероятностно-комбинаторная модель эпидемии, развивающейся в вузе (университете). Модель пригодна для описания скоростей распространения инфекции в учреждениях любой формы очного образования — школа, техникум, вуз. Далее по тексту для определенности используется слово «вуз».

Задача о заражении преподавателей

Пусть в вузе обучается N студентов, преподаватель в течение рабочего дня работает с m студентами. Известно, что r студентов инфицированы, причем инфицированным может оказаться любой студент с одинаковой вероятностью. Число r может быть как меньше, так и больше m. Здесь неважно разбиение студентов на учебные группы. Не имеет значения также расписание занятий преподавателя.

Преподаватель может получить инфекцию двумя путями. В первом случае заражение происходит в результате пространственно-близких контактов с инфицированными студентами, каковыми являются вызов студента к доске, к столу преподавателя, индивидуальная консультация студента на его рабочем месте и т.п. Пространственно-близкие контакты с инфицированными студентами без средств защиты (масок) приводят практически к 100 %-ному заражению преподавателя. Такие заражения возможны при проведении семинаров, лабораторных и практических занятий, а также при приеме зачетов и экзаменов.

Второй путь заражения следующий. Если в аудитории находятся инфицированные студенты, то все участники процесса вдыхают вирусы. Количество полученных вирусов пропорционально времени проведения занятия и числу инфицированных студентов, которые выдыхают вирусы. Согласно сообщениям Роспотребнадзора, нахождение в одном помещении с заболевшим человеком на протяжении рабочего дня, т.е. 8 ч, приводит к вероятности заражения здорового человека $p^* = 4–5$ %. Здесь имеется в виду отсутствие у людей средств индивидуальной защиты. Наличие масок уменьшает вероятность заражения здорового человека примерно в 4 раза. Второй вид инфицирования преподавателей и студентов характерен для всех видов занятий.

Первый путь заражения. В этом случае вероятность опасных пространственно-близких контактов преподавателя с инфицированными студентами может быть найдена по формуле полной вероятности:

$$p = P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(H_i) \cdot P(A|H_i),$$

где A — событие, заключающееся в том, что преподаватель имеет опасный контакт с инфицированным студентом; H_i — гипотезы, состоящие в том, что в данный учебный день среди студентов, с которыми работает преподаватель, есть i инфицированных, $i = \overline{1, k}$, причем

$$k = \begin{cases} m, & r > m \\ r, & r < m \end{cases}.$$

Вероятность наступления i-й гипотезы находится по формуле

$$p_i = P(H_i) = \frac{C_r^i \cdot C_{N-r}^{m-i}}{C_N^m}, \quad (1)$$

а для вычисления вероятности наступления события A в i-й гипотезе применяется классическое определение вероятности произвольного события:

$$P(A|H_i) = \frac{i}{m}.$$

В формуле (1) для вероятности появления i инфицированных студентов среди m студентов, с которыми работает преподаватель, используется сочетание

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!},$$

так как не имеет значения, какой конкретно студент является инфицированным.

Таким образом, вероятность опасного контакта преподавателя с инфицированным студентом в течение рабочего дня равна

$$p^{(1)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} i p_i}{m}. \quad (2)$$

Чтобы получить вероятность заражения преподавателя, нужно (2) умножить на коэффициент Роспотребнадзора $p^* \leq 1$, отражающий собой вероятность заражения при одном опасном контакте здорового и инфицированного человека:

ISSN 2500-2759

$$\widetilde{p}^{(1)} = p^* \frac{\sum_{i=1}^{k} ip_i}{m}. \qquad (3)$$

Второй путь заражения. Заражение через вирусы, получаемые преподавателем в аудитории при нахождении в ней инфицированных лиц, при отсутствии близких контактов опишем следующим образом:

$$\widetilde{p}^{(2)} = p^* \frac{\tau}{8} \sum_{i=1}^{k} ip_i, \qquad (4)$$

где $p^* = 0{,}04$ — цифра, рекомендованная Роспотребнадзором для офисных помещений в расчете на 8-часовой рабочий день; — время нахождения преподавателя в одной аудитории с инфицированными студентами; p_i — вероятность появления инфицированных в аудиторном помещении.

Здесь предполагается, что вероятность заражения одним инфицированным человеком зависит от времени и принимается равной $p^* \frac{\tau}{8}$. Формула (4) является эмпирической и требует, вообще говоря, медицинской верификации. Вместе с тем в (2), (3) и (4) появляется одинаковая сумма.

Вычисление суммы $\sum_{i=1}^{k} ip_i$

Следует учесть, что в вузе для чисел N, m, r, i выполняются неравенства N m, r i. В самом деле $N \sim 10^4$, $m \sim 30–50$, $r \sim 10–100$.

Неравенство m, r i обусловлено тем, что вероятности появления у одного преподавателя более двух инфицированных студентов убывают с увеличением номера i и стремятся к нулю при i m, r.

Для вычисления значения факториала числа N воспользуемся формулой Стирлинга:

$$N! = \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N \left(1 + \frac{1}{12N} + \frac{1}{288N^2} - \ldots\right). \qquad (5)$$

Уже для $N = 10$ точность формулы Стирлинга без последней скобки лучше 1 %. Для $N \sim 10^4$ точность формулы Стирлинга лучше 10^{-5}.

Найдем вероятности p_i наступления i-й гипотезы. Выражения для сочетаний имеют вид

$$C_r^i = \frac{r!}{i!(r-i)!},$$

$$C_{N-r}^{m-i} = \frac{(N-r)!}{(m-i)!(N-r-m+i)!}, \qquad (6)$$

$$C_N^m = \frac{N!}{m!(N-m)!}. \qquad (7)$$

К четырем факториалам в (6) и (7), где фигурирует N, применим формулу Стирлинга без последней скобки в (5). Рассмотрим, например, факториал

$$(N-r)! = \sqrt{2\pi(N-r)}\left(\frac{N-r}{e}\right)^{N-r}.$$

Последнюю круглую скобку преобразуем к виду

$$\left(\frac{N-r}{e}\right)^{N-r} = e^{-(N-r)}N^{N-r}\left(1-\frac{r}{N}\right)^{-r}\left(1-\frac{r}{N}\right)^{N}.$$

Далее в двух последних скобках перейдем к пределу N ∞:

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{r}{N}\right)^{-r} = \left(1-\lim_{N\to\infty}\frac{r}{N}\right)^{-r} = 1;$$

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{r}{N}\right)^{N} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{r}{x}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right)^{-r} = e^{-r}.$$

В результате получаем

$$\left(\frac{N-r}{e}\right)^{N-r} = e^{-N}N^{N-r}.$$

Окончательно имеем

$$(N-r)! = \sqrt{2\pi(N-r)}e^{-N}N^{N-r}. \qquad (8)$$

Аналогичным образом находим

$$(N-r-m+i)! = \sqrt{2\pi(N-r-m+i)}\, e^{-N}N^{N-r-m+i}, \qquad (9)$$

$$(N-m)! = \sqrt{2\pi(N-m)}e^{-N}N^{N-m}. \qquad (10)$$

Подставляя (8)–(10) в (1), получаем вероятности p_i наступления i-й гипотезы:

$$p_i = \frac{r!m!}{i!(r-i)!\ (m-i)!}\sqrt{\frac{(N-r)(N-m)}{(N-r-m+i)N}}N^{-i}.$$

При N ∞ значение корня стремится к единице. В результате приходим к формуле

$$p_i = \frac{r!m!}{i!(r-i)!(m-i)!}N^{-i}. \qquad (11)$$

Согласно (11), вероятности появления у преподавателя одного и двух инфицированных студентов составляют

$$p_1 = \frac{rm}{N},\ rm < N;$$

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1\frac{(r-1)(m-1)}{N} \approx \frac{1}{2}{p_1}^2.$$

ISSN 2500-2759

Вероятность опасного контакта инфицированного студента с преподавателем при $i = 1$ будет равна

$$p_{i=1} = P(H_1) \cdot P(A|H_1) = \frac{p_1}{m} = \frac{r}{N},$$

а при $i = 2$ — N

$$p_{i=2} = P(H_2) \cdot P(A|H_2) = \frac{2p_2}{m} \cong \frac{p_1{}^2}{m} = p_1 \frac{r}{N}.$$

Преобразуем формулу (11), применив к факториалам формулу Стирлинга:

$$(r-i)! = \sqrt{2\pi(r-i)} e^{-r} r^{r-i}, \quad (12)$$

$$(m-i)! = \sqrt{2\pi(m-i)} e^{-m} m^{m-i}, \quad (13)$$

$$r! = \sqrt{2\pi} r e^{-r} r^r, \quad (14)$$

$$m! = \sqrt{2\pi} m e^{-m} m^m. \quad (15)$$

Подставим (12)–(15) в (11). Для небольших значений i получим

$$p_i = \frac{r!m!}{i!(r-i)!(m-i)!} N^{-i} \cong \frac{r^i m^i}{i!} N^{-i} = \frac{1}{i!}\left(\frac{rm}{N}\right)^i.$$

Обозначим и найдем суммы следующих рядов:

$$\sum_i p_i = \sum_{i=0} \frac{x^i}{i!} = e^x, \quad \sum_{i=1} \frac{x^i}{i!} = e^x - 1,$$

$$\sum_{i=1} i p_i = \sum_{i=1} \frac{x^i}{(i-1)!} = x e^x = p_1 e^{p_1}. \quad (16)$$

Экспонента является быстросходящимся рядом. Уже для $x = 0{,}1$ три слагаемых $i = 0$, 1, 2 обеспечивают точность суммирования на уровне $\frac{x^3}{6} = 3 \cdot 10^{-4}$. Именно поэтому можно использовать формулу (16) для вычисления суммы ряда.

С учетом (16) формулы (3) и (4) (вероятности заражения преподавателей) примут вид

$$\tilde{p}^{(1)} = \frac{p_1 e^{p_1}}{m} \tilde{p}^{(2)} = p^* \frac{\tau}{8} p_1 e^{p_1}.$$

Скорость заражения преподавателей

Частота заражения (число заражений в сутки) в расчете на одного преподавателя составит величину

$$k^- = \tilde{p}^{(1)} \cdot 1 \frac{\text{преп}}{\text{сутки}}. \quad (17)$$

Чтобы получить скорость заражения контингента преподавателей, необходимо частоту (17) умножить на общее число преподавателей, работающих в вузе:

$$\left(\frac{dN_{\text{преп}}}{dt}\right)_{\text{заражение}} = k^- \cdot N_{\text{преп}}.$$

В дальнейшем будем считать, что при опасном контакте преподавателя с инфицированным студентом на расстоянии менее 0,5 м медицинская вероятность заражения $p^* - 1$, т.е. предполагается, что контакт с инфицированным человеком приводит к заражению независимо от длительности общения.

Примеры оценок

Предположим, что доля инфицированных студентов в университете совпадает с долей активных случаев N_2 в населенном пункте[1]. Для города с численностью $N_0 = 600\,000$ в период максимума эпидемии $N_2 = 1\,500$. Поэтому

$$\frac{r}{N} = \frac{N_2}{N_0} \approx \frac{1}{400} = 0{,}002\,5.$$

Отсюда $r = 0{,}002\,5 \cdot 10\,000 = 25$.

Величину p_1 оценим следующим образом:

$$p_1 = \frac{50}{400} = \frac{1}{8}.$$

Тогда

$$\tilde{p}^{(1)} = \frac{p_1 e^{p_1}}{m} = \frac{0{,}125 \cdot e^{0{,}125}}{50} = 2{,}2 \cdot 10^{-2}.$$

Здесь коэффициент Роспотребнадзора p^* для $\tilde{p}^{(1)}$ взят равным единице. Из проведенных оценок вытекает, что главную опасность для вуза представляют опасные пространственно-близкие контакты преподавателей с инфицированными студентами. Если в вузе работает 500 преподавателей, то ежедневная скорость заражения преподавателей составит $500 \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-2} = 11$ чел./сут. За семь дней инкубационного периода будет заражено около 80 преподавателей. Ясно, что за две недели работа вуза будет полностью парализована.

Задача о заражении студентов

В вузе N студентов. Все студенты разбиты на J групп, в каждой из которых m_j студентов $\left(\sum_{j=1}^{J} m_j = N\right)$ и появилось r инфицированных

[1] Коронавирус: статистика. URL: https://yandex.ru/covid19/stat.

ISSN 2500-2759

студентов. Определить частоту (скорость) инфицирования студентов.

Решение предыдущей задачи помогает найти скорость заражения студентов. Будем считать, что в студенческой группе каждый студент участвует в опасных контактах с остальными членами группы равновероятно. Тогда вероятность заражения в расчете на одного студента в сутки составит

$$\widetilde{p}^{(1)} = p^{*}\frac{p_1 e^{p_1}}{m_j},\ p_1 = \frac{rm_j}{N}. \qquad (18)$$

Чтобы определить количество студентов, инфицируемых в вузе за один день, нужно удельную скорость (18) усреднить по всем студенческим группам и умножить на численность студентов в вузе. Примем для простоты численность всех студенческих групп одинаковой и равной m. Тогда скорость инфицирования студентов составит

$$\frac{dr}{dt} = p^{*}\frac{p_1 e^{p_1}}{m}N = p^{*}re^{\frac{rm}{N}}.$$

Для случая $N = 4\,000$, $m = 20$, $r = 20$, получим

$$\frac{dr}{dt} = 1 \cdot 20e^{0,1} = 1,105 \cdot 20 = 22,$$

где эпидемический коэффициент увеличения числа инфицированных составил 1,105, т.е. за две недели заболеет 308 студентов.

Заключение

В статье рассмотрены две задачи о вычислении вероятностей и скоростей заражения преподавателей и студентов в вузе в результате распространения вирусной инфекции на примере эпидемии коронавируса. Найдена аналитически вероятность опасных пространственно-близких контактов преподавателя с инфицированными студентами, а также здорового студента с инфицированными. Теория базируется на применении формул полной вероятности для многовариантного сценария, формул для комбинаторных сочетаний, асимптотической формулы Стирлинга для факториалов, суммирования рядов. В результате проведенных преобразований определены аналитически скорости инфицирования внутри коллектива преподавателей и в среде студентов.

Исследования показали, что основной причиной инфицирования преподавателей являются опасные пространственно-близкие контакты с инфицированными студентами, к числу которых относятся вызовы студентов к доске, консультации и приемы заданий за столом у преподавателя или за столом у студента. Показано также, что при проведении аудиторных занятий (лекций и семинаров) в случае присутствия в аудитории инфицированных студентов существует примерно в 10 раз меньшая вероятность заражения преподавателя. Даже если полностью ликвидировать опасные пространственно-близкие контакты преподавателя со студентами, останется вероятность аудиторного заражения. При этом распространение инфекции в коллективе студентов останется на прежнем уровне и будет определяться опасными контактами между студентами.

При надлежащем использовании полученные результаты могут быть полезны руководству учебных заведений — школ, техникумов, вузов (университетов), а также региональным отделениям Роспотребнадзора.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тамм М.В. Коронавирусная инфекция в Москве: прогнозы и сценарии / М.В.Тамм // Фармакоэкономика. Современная фармакоэкономика и фармакоэпидемиология. — 2020. — Т. 13, № 1. — С. 43–51.

2. Иванов М.В. Математическое моделирование процесса пандемии. Теория и практика / М.В. Иванов // Институт развития стратегических инициатив. — 2020. — URL: https://indsi.ru/2020/04/30.

3. Бароян О.В. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР / О.В. Бароян, Л.А. Рвачев, Ю.Г. Иванников. — Москва, 1977. — 546 с.

4. Боев Б.В. Прогнозно-аналитические модели эпидемий (оценка последствий техногенных аварий и природных катастроф) : лекция / Б.В. Боев. — URL: https://armscontrol.ru/course/lectures05a/bvb050324.pdf.

5. Современное состояние проблемы математического моделирования и прогнозирования эпидемического процесса / А.А. Лопатин, В.А. Сафронов, А.С. Раздорский, Е.В. Куклев // Проблемы особо опасных инфекций. — 2010. — № 3 (105). — С. 28–30.

6. Боровский А.В. Модель эпидемии с запаздыванием / А.В. Боровский // System Analysis and Mathematical Modeling. — 2020. — Т. 2, № 4. — С. 53–63.

7. Боровский А.В. Математическая модель эпидемии со скрытым инкубационным периодом заражения / А.В. Боровский, А.Л. Галкин // Передовое развитие современной науки как драйвер роста экономики и социальной сферы : сб. ст. II Всерос. науч.-практ. конф., г. Петрозаводск, 20 дек. 2020 г. — Петрозаводск, 2020. — С. 182–186.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафе-

Authors

Andrei V. Borovsky — D.Sc. in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathe-

ISSN 2500-2759

дра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Ведерникова Татьяна Ивановна — кандидат технических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: Vedernikovati@bgu.ru.

Для цитирования

Боровский А.В. Вероятностно-комбинаторная модель эпидемии для вуза / А.В. Боровский, Т.И. Ведерникова. — DOI 10.17150/2500-2759.2021.31(4).502-507 // Известия Байкальского государственного университета. — 2021. — Т. 31, № 4. — С. 502–507.

matical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Tatyana I. Vedernikova — Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: VedernikovaTI@bgu.ru.

For Citation

Borovsky A.V., Vedernikova T.I. Probabilistic Combinatorial Model of the Epidemic for a University. *Izvestiya Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2021, vol. 31, no. 4, pp. 502–507. (In Russian). DOI: 10.17150/2500-2759.2021.31(4).502-507.